

**С. М. БАЛЮТА**, канд. техн. наук, доцент НУПТ,  
**О. Н. БЕЗМЕНОВА**, студентка НТУ «ХПИ»

### КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРОКАТНОГО СТАНА

У статті запропоновано квазістатичну математичну модель металопрокатного стану, що дозволяє звести задачу вибору настроювальних технологічних параметрів до класичної двоточковою крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь. Математична модель може бути використана також для синтезу системи стабілізації обраних технологічних параметрів.

В статье предложена квазистатическая математическая модель металопрокатного стана, позволяющая свести задачу выбора настроечных технологических параметров к классической двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Математическая модель может быть использована также для синтеза системы стабилизации выбранных технологических параметров.

In the article the quasi-static mathematical model of the metal-rolling mill is proposed, which makes it possible to reduce the tuning technological parameters selection problem to the classical two-point boundary value problem for the system of ordinary differential equations. The mathematical model can be also used for the synthesis of stabilizing system of selected technological parameters.

**Введение.** Современный металлопрокатный стан представляет собой один из сложнейших объектов управления. Эта сложность обусловлена, множеством различных по природе взаимосвязанных между собой подпроцессов, составляющих процесс прокатки. К ним относятся, прежде всего, процессы термопластической деформации металлов, механические процессы в элементах клеток, а также электромеханические процессы в системах приводов. Кроме перечисленных подпроцессов, можно отметить и другие, детально рассмотренные в соответствующей научно-технической литературе [1, 2].

Математические модели отдельных подпроцессов металлопрокатного производства (МПП) могут быть линейными, нелинейными, распределенными, дискретными, описываться алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Такое разнообразие классов математических моделей приводит к серьезным затруднениям при синтезе систем автоматического управления МПП. Кроме того, математические модели некоторых элементарных процессов МПП являются весьма приближенными по структуре и содержат ряд неопределенных параметров.

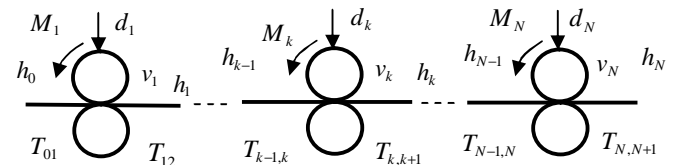
Указанные обстоятельства приводят к необходимости рассматривать упрощенные математические модели МПП, позволяющие синтезировать приближенные законы управления. Уточнение процесса управления осуществляется на основе стабилизирующих воздействий по отклонению от

программной траектории. Такая двухуровневая концепция построения систем управления рассмотрена в [3].

Особенный интерес с практической точки зрения представляет математическая модель МПП, основанная на квазистатическом подходе, известном из классической термодинамики. При таком подходе реальные фазовые траектории МПП, полученные в результате изменения управляющих параметров, заменяются последовательностями положений равновесия, соответствующих последовательностям значений управляющих воздействий. При определенных условиях на скорость изменения последних такое представление управляемого процесса дает достаточно хорошее приближение к реальному. Такие условия для класса линейных систем рассмотрены в [4]. Основным достоинством квазистатического моделирования управляемых процессов является возможность построения математической модели на основании статических взаимосвязей «вход–выход», которые могут быть получены в результате экспериментальных исследований.

Целью настоящей работы является разработка квазистатической математической модели МПП и анализ на ее основе различных путей решения задачи перенастройки технологических параметров.

**Математическая модель МПП.** Рассмотрим упрощенную структурную схему процесса холодной прокатки металла в многоклетевом непрерывном стане, изображенную на рисунке.



Структурная схема процесса прокатки

На рисунке введены следующие обозначения основных технологических параметров МПП:

$h_0, h_1, \dots, h_N$  – толщины полосы,

$v_1, v_2, \dots, v_N$  – скорости полосы,

$T_{01}, T_{12}, T_{23}, \dots, T_{N,N+1}$  – натяжения полосы,

$M_1, M_2, \dots, M_N$  – моменты прокатки на различных участках прокатного стана,

$d_1, d_2, \dots, d_N$  – перемещения нажимных винтов.

Толщина полосы и момент прокатки на  $k$ -м участке связаны с остальными технологическими параметрами некоторыми соотношениями [4]:

$$h_k = f(h_{k-1}, d_k, T_{k-1:k}, T_{k:k+1}), \quad (1)$$

$$M_k = g(h_{k-1}, d_k, T_{k-1:k}, T_{k:k+1}). \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) являются в общем случае полуэмпирическими и могут быть получены на основании серии экспериментов на реальных прокатных станах. Кроме того, в литературе [1,2] предложены различные подходы к определению зависимостей (1) и (2). В любом случае будем считать что (1) и (2) известны и представляют собой непрерывные, дважды дифференцируемые функции своих аргументов.

Систему соотношений (1) и (2) дополним соотношениями для скорости полосы  $v_k$  [2]:

$$v_k = \gamma n_k [1 + b(T_{k+1} - T_{k-1})], \quad (3)$$

где  $n_k$  – частота вращения валков в  $k$ -й клетки стана,  $\gamma$  и  $b$  – постоянные эмпирические коэффициенты.

Последняя группа соотношений для параметров прокатки основана на условии сплошности, т. е. постоянства секундных расходов металла через каждую из клеток стана. Эти соотношения имеют вид

$$\mathbf{v}_k h_k = R, \quad (4)$$

где  $R$  – производительность процесса прокатки.

Систему статических уравнений процесса прокатки дополним системой уравнений электропривода валков. В случае использования электропривода постоянного тока эти уравнения примут вид

$$\beta U_k + \nu n_k = M_k, \quad (5)$$

где  $U_k$  – управляющее напряжение,  $\beta$  и  $\nu$  постоянные коэффициенты, зависящие от конструктивных особенностей применяемых электродвигателей.

Таким образом, получена система  $5N$  уравнений (1–5), связывающих  $7N + 3$  технологических параметров  $(h_0, \dots, h_N, v_1, \dots, v_N, T_{01}, \dots, T_{N+1}, M_1, \dots, M_N, d_1, \dots, d_N, n_1, \dots, n_N, U_1, \dots, U_N, R)$ . Среди последних  $2N$  параметров  $(d_1, \dots, d_N, U_1, \dots, U_N)$  естественно принять в качестве управляющих, а 3 параметра  $(h_0, h_N, R)$  принять в качестве исходных данных технологического процесса. Оставшиеся  $5N$  параметров находятся в результате решения системы уравнений (1) – (5) и зависят от  $2N$  управляющих параметров – векторов  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{U}$ . Таким образом, систему уравнений (1) – (5) можно рассматривать как математическую модель равновесных состояний технологического процесса проката, задаваемых

векторами  $d$  и  $U$ . Учтем также, что на все перечисленные выше технологические параметры наложены естественные ограничения на диапазоны их изменений. Кроме этих ограничений, имеют место и ограничения по взаимосвязи между толщинами проката

$$h_0 \geq h_1 \geq \dots \geq h_N$$

Совокупность указанных ограничений представляет собой выпуклый многогранник  $L$  в пространстве  $7N$  параметров технологического процесса. Таким образом, задача настройки технологических параметров МПП формально сводится к нахождению одного или нескольких решений системы  $5N$  уравнений (1) – (5) относительно  $7N$  неизвестных, принадлежащих многограннику  $L$ .

**Математическая модель задачи настройки технологического процесса.** Рассмотрим некоторый модельный технологический процесс, характеризующийся вектором технологических параметров  $x \in R^n$ . Вектор  $x$  предполагается состоящим из двух составляющих  $x^1 \in R^m$  и  $x^2 \in R^{n-m}$ . Вектор  $x^1$  соответствует вектору выходных координат, а  $x^2$  – вектору управляющих параметров. Следует отметить, что такое разбиение  $x$  на  $x^1$  и  $x^2$  может быть достаточно условным. Будем предполагать, что компоненты вектора  $x$  связаны между собой системой технологических уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

представляющих собой систему алгебраических уравнений, полученную на основании различных физических законов и экспериментальных данных. В векторной форме (6) будем записывать в виде  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{f}(x^1, x^2) = \mathbf{0}$ .

Поскольку  $n > m$ , то  $r = n - m$  переменных можно выбирать произвольно. Остальные  $m$  параметров процесса находятся в результате решения системы (6). Таким образом, в общем случае система (6) имеет множество решений, представляющее собой  $r$ -мерное многообразие  $M$ .

Вторую группу условий на технологические параметры составляют ограничения типа неравенств на некоторые функции компонент вектора  $x$ . Для компонент вектора  $x^2$  управляющих параметров это обычно ограничения на их минимальные и максимальные значения, а для компонент  $x^1$  это допустимые пределы изменения выходных параметров как в абсолютных величинах так по отношению к другим технологическим параметрам. В

Таким образом, задачу начальной настройки технологического процесса можно сформулировать в алгебраическом виде: найти вектор  $x \in M \cap L$ , или, проще говоря, найти какое-либо решение системы алгебраических уравнений (6), удовлетворяющее условию  $x \in L$ .

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7)$$

Задачу оптимизации можно свести к последовательности решений задач начальной настройки, включив (7) при некотором фиксированном значении  $z$  в систему уравнений (6) и уменьшая на каждом шаге величину  $z$  в (7). Такой подход отличается от традиционного, основанного на оптимизации функций (7) при условиях (6) и  $x \in L$  методами множителей Лагранжа или штрафных функций, и по своей сути сводится к одномерному поиску экстремума на решениях расширенной системы алгебраических уравнений (6), (7).

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m f_k^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L. \quad (8)$$

Однако, численное решение задачи минимизации (8), как правило, затруднительно в связи с наличием большого количества локальных минимумов и «оврагов» [7].

Введем в рассмотрение вектор невязок  $y \in R^m$ :

7

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \quad (10)$$

Продифференцируем (10) по времени. В результате получим

Обозначая  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^1} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  – матрицы Якоби

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1 &= \Phi(x)u - \Phi(x)V(x)v, \\ \mathbf{x}^2 &= v, \\ \mathbf{x}^3 &= u,\end{aligned}\tag{12}$$

Таким образом, задачу настройки технологического процесса можно свести к следующей задаче управления: из некоторого начального состояния  $(\mathbf{x}_0^T, \mathbf{y}_0^T)^T$  перевести систему (12) в конечное состояние  $(\mathbf{x}_L^T, \mathbf{0})^T$ , где  $\mathbf{x}_L \in L$ ,  $\mathbf{0} - (1 \times r)$ -вектор. Начальное состояние выбирается путем вычисления вектора  $\mathbf{y}_0$  в результате подстановки некоторого начального значения  $\mathbf{x}_0$  в (9) т.е.  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Будем также предполагать, что множество  $L$  представляет собой сумму множеств  $L = L_1 + L_2$ , причем  $\mathbf{x}^1 \in L_1$ ,  $\mathbf{x}^2 \in L_2$ . Отметим также, что, поскольку временной масштаб не задан, то можно принять временной интервал единичным  $t \in [0, 1]$ , а значения  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  неограниченными.

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}^{\mathfrak{l}} &= \Phi(x^1, x^2)u, \\ \mathfrak{X} &= u,\end{aligned}\tag{13}$$

найти закон управления  $u(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , при котором  $y(1) = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{0}$  –  $(n \times 1)$ -вектор. Нетрудно видеть, что одним из таких законов будет

$$u(t) = -y_0 = c. \quad (14)$$

Тогда искомое значение  $x^1(1)$  может быть получено в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \Phi(x^1, x^2)c. \quad (15)$$

при фиксированном векторе  $x^2$  и начальном значении  $x^1(0)$ , полученном ранее.

Интегрирование (15) не вызывает принципиальных затруднений, если матрица  $\Phi(x)$  получена аналитически путем обращения матрицы Якоби  $W(x)$  в общем виде. Обойти операцию обращения матрицы  $W(x)$  предлагается следующим образом. Воспользуемся известной формулой для производной обратной матрицы

$$\dot{\Phi} = -\Phi W \Phi. \quad (16)$$

В свою очередь полная производная матрицы-функции  $W(x^1, x^2)$  по времени может быть представлена в виде

$$V\dot{x}(x^1, x^2) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W}{\partial x_k}(\phi_k, c), \quad (17)$$

где  $\phi_k$  –  $k$ -й столбец матрицы  $\Phi$ .

Тогда процедуру обращения матрицы  $W(x)$  на каждом шаге интегрирования системы (15) можно заменить шагом интегрирования матричного дифференциального уравнения (16), обратив матрицу  $W(x)$  только один раз при значении  $x = x_0$ .

**Сведение к двухточечной краевой задаче.** Рассмотренный выше подход к нахождению настройки технологических параметров позволяет организовать управление настройкой путем изменения вектора параметров  $x^2 \in L_2$ , так чтобы решение дифференциального уравнения (15) удовлетворяло условию  $x^2(1) \in L_1$ . Для организации целенаправленного изменения вектора  $x^2$  вернемся к исходной системе (12). Ее структура такова, что только выбором вектора управлений  $u(t)$  можно получить нулевую невязку  $y(1)$ . Например, в виде (14). Вектор управлений  $v(t)$  обеспечивает в свою очередь конечные

условия на управляемый процесс  $x^1(1) \in L_1$ ,  $x^2(1) \in L_2$  при условии выполнения  $y(1) = \mathbf{0}$ .

Для того чтобы использовать классические методы теории управления введем удобный для дальнейшего рассмотрения критерий оптимальности

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 v^T v dt, \quad (18)$$

а вместо многогранников  $L_1$  и  $L_2$  будем рассматривать их приближения в форме эллипсоидов  $E_1$  и  $E_2$  [5]. Такая замена цели управления позволяет воспользоваться традиционной формой условий transversальности вариационного исчисления и принципа максимума Понтрягина. С учетом сделанных предположений функция Гамильтона примет вид

$$H = \frac{1}{2} v^T v + \lambda_1^T \Phi c - \lambda_1^T \Phi V v + \lambda_2^T v, \quad (19)$$

где  $\lambda = (\lambda_1^T, \lambda_2^T)^T$  – вектор сопряженных переменных.

В соответствии с принципом максимума оптимальный закон управления найдем из условия

$$\frac{\partial H}{\partial v} = v^T - \lambda_1^T \Phi V + \lambda_2^T = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{0}$  –  $(r \times 1)$ -вектор.

Таким образом, оптимальный закон управления примет вид

$$v^T = \lambda_1^T \Phi V - \lambda_2^T. \quad (20)$$

В свою очередь вектор сопряженных переменных удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1^T \Phi(x)c - \lambda_1^T \Phi(x)V(x)v) \quad (21)$$

образующей совместно с первыми двумя уравнениями (12) гамильтонову систему  $2n$  дифференциальных уравнений.

Сопряженную систему (21) можно представить в следующем виде:

$$\dot{\lambda} = -\lambda_1^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} c + \lambda_1^T \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} V v + \lambda_1^T \frac{\partial V}{\partial x_k} v, \quad k = \overline{1, n}. \quad (22)$$

В свою очередь матрицы  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$  могут быть выражены через производную от матрицы  $W$  по аналогии с (16):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = -\Phi \frac{\partial W}{\partial x_k} \Phi. \quad (23)$$

Постановка двухточечной краевой задачи завершается формулировкой условий трансверсальности состоящих в ортогональности сопряженных векторов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  эллипсоидам  $E_1$  и  $E_2$  соответственно в момент времени  $t=1$

$$\lambda_1^T = c_1 \frac{\partial E_1}{\partial x^1}, \quad \lambda_2^T = c_2 \frac{\partial E_2}{\partial x^2}, \quad (24)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – неопределенные постоянные.

Таким образом, решение двухточечной краевой задачи состоит в нахождении начальных условий для сопряженной системы (22) таких, чтобы решения гамильтоновой системы (12) и (22) с учетом закона управления (20) в конечный момент времени  $t=1$  удовлетворяли условиям  $x \in L$  и условиям (24).

Решение сформулированной двухточечной краевой задачи может быть получено в результате применения численных методов, изложенных в соответствующей литературе [6].

**Заключение.** Основным результатом исследования является разработка квазистатической математической модели металлопрокатного стана. Достоинством предложенной математической модели является ее относительная простота, основанная на статических соотношениях между технологическими параметрами. С другой стороны система дифференциальных уравнений, описывающая квазистатические фазовые траектории, позволяет применить мощный арсенал средств теории оптимального управления для решения различных задач, связанных с перенастройкой технологических параметров процесса прокатки.

**Список литературы:** 1. Целиков А.И. Теория расчета усилий в прокатных станах. – М.: Металлургиздат, 1962. – 434с. 2. Дружинин Н.Н. Непрерывные станы как объект автоматизации. – М.: Металлургия, 1967. – 259с. 3. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488с. 4. Куценко А.С., Чан Занг Лю Критерии адекватности динамических и статических математических моделей технологических процессов// Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2003. – № 18. – С.23–28. 5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 320с. 6. Брайсон А., Хо-Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544с. 7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 512с.

Поступила в редколлегию 18.12.09

УДК 519.677:658.23

**Н.В. ШАТОХИНА**, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В статті запропоновано математичний апарат оптимізації показників діяльності виробничо-економічної системи як розв'язання задачі синтезу власних векторів відповідних матриць.

В статье предложен математический аппарат оптимизации показателей деятельности производственно-экономической системы как решение задачи синтеза собственных векторов соответствующих матриц.

In this article the mathematical apparatus for optimization of production and business system parameters as solution for eigenvectors synthesis task of correspondent matrixes have been proposed.

**Введение.** В настоящее время математические методы и модели находят широкое применение в стратегическом планировании и управлении. Полезные прикладные результаты получены при моделировании производственных, экономических и организационных процессов [1].

Производственное предприятие, организация или некоторый проект представляют собой сложную систему. Функционирование такой системы происходит под воздействием целого набора различных факторов, постоянно изменяющихся под воздействием внешних условий. Очевидно, что управление подобной системой представляет нетривиальную задачу.

Решение подобных задач становится практически невозможным без внедрения информационных систем, основной составляющей которых являются информационные технологии, основанные на применении совокупности моделей и методов, разработанных при помощи некоторого математического аппарата, и средств обработки информации.

Разработка и анализ результатов использования экономико-математических моделей позволяет не только ускорить процесс принятия решений, но и более комплексно представить рассматриваемую проблему по сравнению с анализом, который может провести даже самый высококвалифицированный и опытный эксперт.

Эффективность экономико-математического моделирования в значительной степени определяется адекватностью построенной модели, а также правильным выбором методологий и методов работы с ней.

Анализ используемых до настоящего времени на практике подходов к моделированию факторов, влияющих на функционирование организации, показывает, что большинство из них носят скорее качественный характер [2]. Это затрудняет их формализацию и автоматизацию учета.